UNIDAD DE APRENDIZAJE IV

Saberes procedimentales	Saberes declarativos
1. Utiliza correctamente el lenguaje algebraico, geométrico y trigonométrico. 2. Identifica la simbología propia de la geometría y la trigonometría. 3. Identifica las unidades para medir angulos. 4. Emplea de manera sistemática conceptos geométricos y trigonométricos en problemas cotidiano.	Clasificación de triángulos oblicuángulos. Metodología de la resolución de triángulo oblicuángulos mediante la división de triángulos rectángulos. Teorema de Senos. Teorema de Cosenos. Aplicaciones.

A Clasificación de Triángulos Oblicuángulos

Podemos llamar a un triangulo oblicuángulo aquel que no tiene un Angulo recto, esto hace que no lo podamos resolver directamente con el teorema de Pitágoras, por lo que usaremos otras herramientas como lo pueden ser los teoremas de SENO y de COSENO.

- Triángulos
  - Rectángulos
  - Oblicuángulos
    - Acutángulos
    - Obtusángulos

Triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo de 90° y sus 2 de sus lados reciben el nombre de catetos y lado más grande de hipotenusa.

Triángulo Oblicuángulo es el que no tiene ningún ángulo de 90°. Y se dividen en Acutángulo y Obtusángulo.

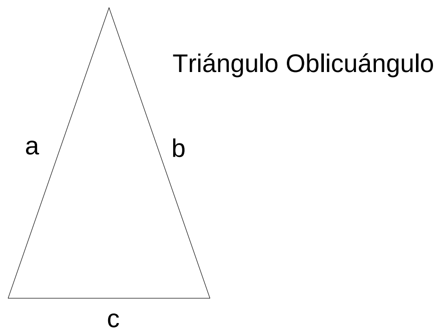
Triángulo Obtusángulo es el que tiene como principal característica un ángulo mayor de 90° llamado ángulo obtuso y por consecuencia los otros dos ángulos restantes serán ángulos agudos.

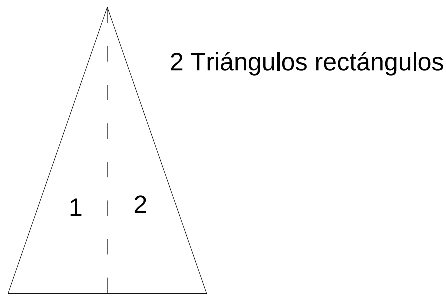
Triángulo acutángulo es el que tiene como característica que sus tres ángulos son menores de 90° , son ángulos agudos.

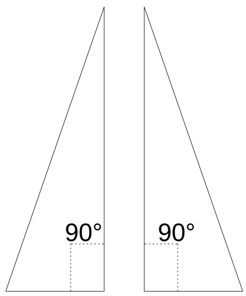
B Metodología de la Resolución de Triángulos Oblicuángulos mediante la división en triángulos rectángulos

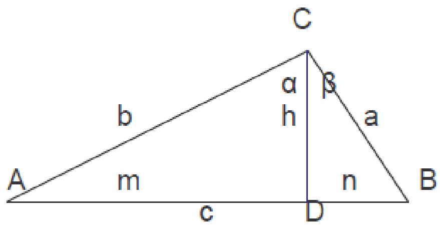
Ya sabemos que el teorema de Pitágoras lo utilizamos para resolver triángulos Rectángulos, pero también lo podríamos aplicar para triángulos obtusángulos, siempre y cuando estos triángulos los podamos dividir en triángulos rectángulos más pequeños que estén incluidos en el oblicuángulo.

Por ejemplo un triangulo oblicuángulo se podría divir en dos triángulos rectángulos como se ve a continuación:







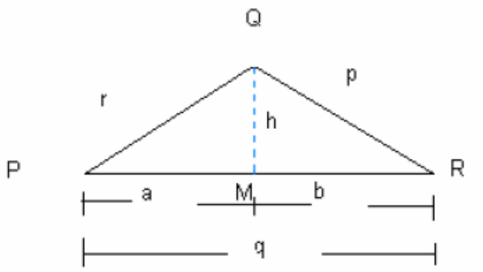


Tanto el triángulo ABC como el BDC son rect+angulos que tienen las ssiguientes carácter´sticas:

1. El lado h es común a los dos triángulos
2. El angulo C es la suma de los ánguloa $\propto\ y\ \beta$
3. El lado c es la sema de los lados m y n

Ejemplo

El lado p mide 38cm, el lado q es de 56cm y el ángulo R mide 32°33´. Calcular el valor de los demás elementos. Incluyendo el área



Primero en el triángulo PQR se traza la altura h y se ha separado en dos triángulos rectángulos que son QMP y QMR. Entonces la altura es

$$Sen\ R = \frac{h}{p}$$

$$pSen\ R = h$$

$$(38)(Sen\ 62°33') = h$$

$$33.72cm = h$$

Se calcula en el triángulo QMP la base a con ayuda del teorema de Pitágoras

$$a^2 + h^2 = p^2$$

$$a^2 = -h^2 + p^2$$

$$a^2 = 17.52cm$$

Y por construcción se sabe que $a + b = q$

$$b = q - a = 56 - 17.52 = 38.48cm$$

Ahora, al usar tangente, se calcula el ángulo P

$$Tan\ P = \frac{h}{a}$$

$$Tan\ P = \frac{33.72}{38.48} = 0.8762$$

$$P = \arctan 0.8762 = 41°13'33''$$

Con el teorema de suma de los ángulos internos del triángulo $P + Q + R = 180°$

$$Q = 180° - P - R = 76°13'27''$$

En los triángulos rectángulos QMP y QMR el área es la base por altura sobre dos

Para el triángulo QMP: $A = \frac{(38.48)(33.72)}{2} = 648.77cm^2$

Para el triángulo QMR: $A = \frac{(17.52)(33.72)}{2} = 295.39cm^2$

Por lo tanto el área total del triángulo es $944.16cm^2$.

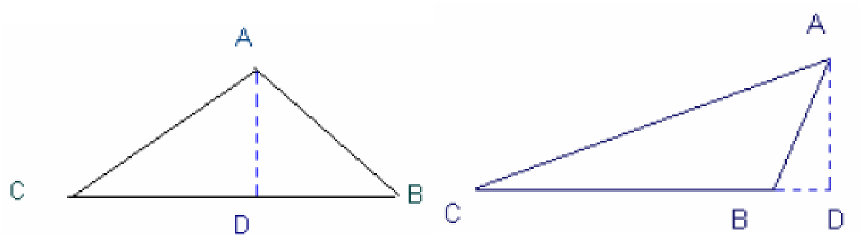
Ejercicios

Calcular los lados y ángulos faltantes de los siguientes triángulos

1.	a=12.30	B=38°20´	C=77°10´
2.	b=25.36	A=54°8´	C=27°15´
3.	c=0.35	A=36°24´	B=44°35´
4.	a=50.28	A=10°37´	B=46°36´
5.	c=54.27	a=28.35	B=74°
6.	b=12.84	c=9.78	A=29°38´
7.	b=2.304	c=3.568	A=62°
8.	a=74.2	c=12.5	B=82°58´
9.	a=485	b=346	C=51°
10.	a=27.3	b=15.8	C=47°

C Teorema de Senos

Al trazar la altura (AD) al lado opuesto o su proongación, a partir del vértice, es posible determinar dos triángulos rectángulos (ADC) como se ve en las siguientes figuras:



De acuerdo a lo ya estudiado en cualquiera de los dos casos, se determina que:

$$SenB = \frac{AD}{AB} \qquad \text{y} \qquad Sen\ C = \frac{AD}{AC}$$

$$(AB)SenB = AD \qquad \text{y} \qquad (AC)SenC = AD$$

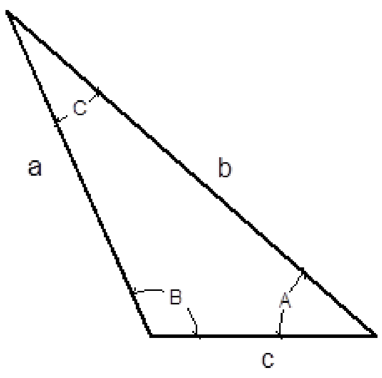
De las igualdades anteriores al despejar AD e igualar los primeros miembros se obtiene:

$$\frac{SenB}{AC} = \frac{SenC}{AB}$$

Y en los mismos triángulos al trazar otra altura diferente a AD se deduce:

$$\frac{SenA}{CB} = \frac{Sen\ C}{AB} = \frac{Sen\ B}{AC}$$

Este teorema se expresa de la siguiente manera:



$$\frac{a}{SenA} = \frac{b}{SenB} = \frac{c}{SenC}$$

O puede manejarse de la siguiente manera

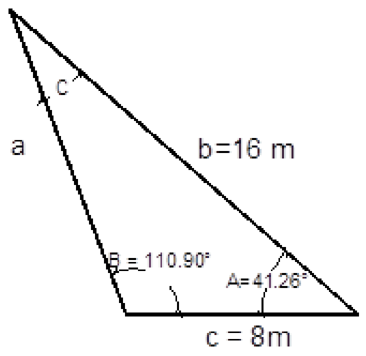
$$\frac{SenA}{a} = \frac{SenB}{b} = \frac{SenC}{c}$$

Muestra una relación de razones entre el lado de un triangulo y su ángulo opuesto ó viceversa siendo la misma para los tres lados, lo que nos facilita la obtención de datos cuando conocemos 3 de 4 que igualamos por cada dos lados que igualamos.

Se recomienda usar la primera expresión cuando queremos encontrar un lado ya que al alumno le facilita el despeje algebraico. Y la segunda expresión para cuando se quiera encontrar el valor del ángulo, por las mismas circunstancias antes mencionadas.

Ejemplos Resuelva el siguiente triangulo usando el teorema de Senos

1. Aplicando la relación entre $\frac{a}{SenA}=\frac{b}{SenB}$ porque conozco 3 de 4 de los datos que implican esta relación tenemos que:



$$a=\frac{b}{SenB}(SenA)$$

$$a=\frac{16}{Sen110.90°}(Sen41.26°)$$
$$a=17.126(0.6595)$$

$$a=11.29mts$$

Nota: considerar con el maestro aproximación en decimales en los resultados

2. Calcular la medida de los lados y ángulos faltantes de acuerdo a los datos siguientes: a=13cm, b= 17cm y B=58°.

Sustituyendo en el teorema de senos se tiene que

$$\frac{Sen\ A}{a}=\frac{Sen\ B}{b}$$
$$\frac{Sen\ A}{12}=\frac{Sen\ 58°}{17}$$
$$SenA=\frac{(0.8480)(12)}{17}=0.5986$$
$$A=arcsen0.5986=36°46´17´´$$

Para el cálculo de C se puede utilizar el teorema de ángulos internos de un triángulo:

$$A+B+C=180°$$
$$C=180°-58°-36°46´17´´=8513´43´´$$

Para el cálculo del lado c, utilizar de nueva cuenta ley de senos

$$\frac{Sen\ C}{c}=\frac{Sen\ B}{b}$$
$$c=\frac{b\ Sen\ C}{Sen\ B}$$
$$c=\frac{(17)(0.9965)}{0.8480}=19.98cm$$

Ejercicios

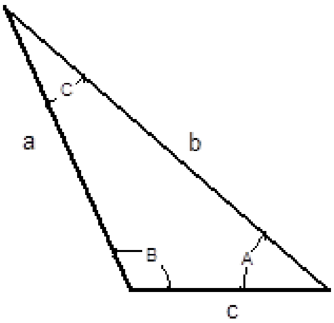
Calcular los lados y ángulos faltantes de los siguientes triángulos

1. p=5.5cm q=5.45cm Q=53°43´
2. b=28m A=0.3142rad B=0.6283rad
3. m=24.75cm o=17.5cm O=18°

4. a=75m b=36m A=60°
5. X=35°20´ Y=58 x=45cm
6. N=75° m=12dc n=23dc
7. a=7.75m b=9.75m B=72°
8. r=430cm s=500cm R=28°

D Teorema de Coseno

Este teorema se expresa de la siguiente manera



$$a^2 = b^2 + c^2 - (2bc)CosA$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - (2ac)CosB$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - (2ab)CosC$$

Podemos observar cómo se mantiene la relación entre los ángulos y los lados sin importar de qué lado estamos hablando. Las tres expresiones anteriores se refieren al teorema de cosenos. Si se quisiera conocer el valor de los ángulos bastaría con despejar correctamente la función de Coseno de cada expresión. Como por ejemplo de la expresión $c^2 = a^2 + b^2 - (2ab)CosC$ despejando Cos C nos queda:

$$c^2 + (2ab)CosC = a^2 + b^2$$

$$(2ab)CosC = a^2 + b^2 - c^2$$

$$(2ab)CosC = a^2 + b^2 - c^2$$

$$CosC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{(2ab)}$$

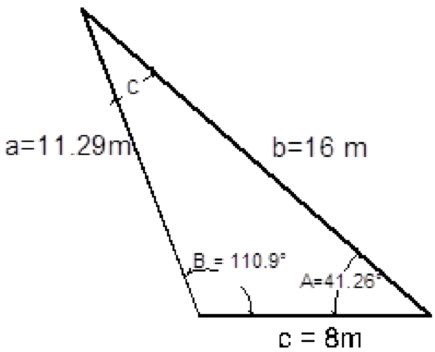
Ejemplo Resuelva el siguiente triángulo aplicando el teorema de cosenos

Aplicando $c^2 = a^2 + b^2 - (2ab)CosC$

Despejando Cos C

$$CosC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{(2ab)}$$

$$CosC = \frac{11.29^2 + 16^2 - 8^2}{(2(11.29)(16))}$$



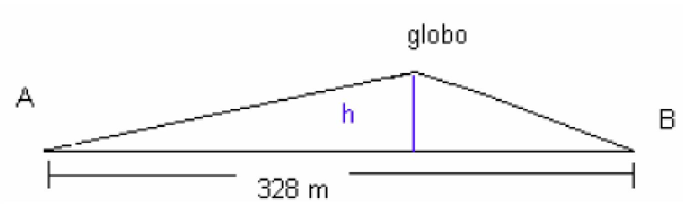
$$CosC = \frac{319.46}{(361.28)} = 0.8842$$

$$Cos^{-1}(89°) = 27.85m$$

Nota: considerar con el maestro aproximación en decimales en los resultados

APLICACIONES

1.- dos observadores distantes de 328 m en terreno horizantal, miden los ángulos de elevación de un globo estático, situado en el mismo plano que ellos, y hallan que sus medidas son: A=39° y B=4730´. ¿A qué altura se halla el globo?



Primero con teorema de suma de ángulos se calcula el del globo G

$$G + A + B = 180°$$

$$G = 180° - A - B$$

$$G = 93°30´$$

A continuación con el teorema de senos se cacula el lado b

$$\frac{b}{SenB} = \frac{g}{SenG}$$

$$b = \frac{gSenB}{SenG}$$

$$b = \frac{(328)(0.6923)}{(0.9981)} = 206.8m$$

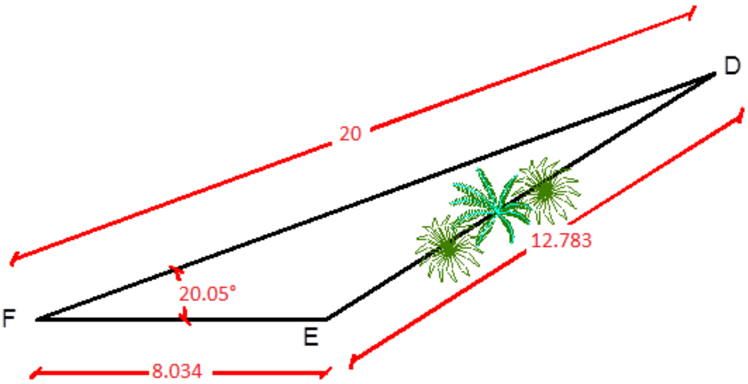
Finalmente con cualquiera de los triángulo rectángulo se calcula la altura h

$$SenA = \frac{h}{b}$$

$$bSenA = h$$

$$h = (206.8)(0.7373) = 152.47m$$

2.- Entre los puntos E y D hay una vegetación , pero entre los puntos F y D asi como F y E si son accesibles y se pueden medir ¿Cuál será la distancia entre E y D



2.- Del ejercicio anterior calcule los ángulos Faltantes.

Ejercicios

Resover los siguientes triángulos oblicuángulos cuyos datos:

1.	A=80°	B=2°15´	b=81cm
2.	A=42°10´	B=59°30´	a=13.5cm
3.	A=55°	C=61°37´	a=63.32cm
4.	B=60°21´	C=71°13´	c=75.80cm
5.	B=95°36´	C=24°	b=0.87m
6.	B=80°	C=45°	a=80cm
7.	B=35°	C=44°25´	a=8cm
8.	B=69°39´	a=54.08cm	b=60.45cm
9.	C=42°	a=3.604cm	c=3.125cm
10.	A=74°30´	a=422cm	c=358cm
11.	B=39°	b=15cm	c=8cm
12.	a=4cm	b=5cm	c=6cm
13.	a=12cm	b=18cm	c=20cm
14.	a=3.2cm	b=4.8cm	c=6.3cm
15.	a=80cm	b=85cm	c=90cm
16.	A=63°	a=0.1734m	b=0.1545m
17.	A=100°30´	B=25°40´	a=45cm
18.	A110°20´	a=8.5cm	b=4.5cm
19.	C=27°	b=8.40cm	c=6.10cm
20.	a=29.3km	b=40.6km	c=34.1km

21. En un paralelogramo los lados adyacentes miden respectivamente 34cm y 65cm y uno de sus ángulo mide 48°. Calcular el área del paalelogramo.

22. Calcular el área de un octágono regular inscrito en un círculo cuyo radio mide 34cm.

23. En un círculo de 12.56cm de diámetro se inscribe un pentágono, calcular su área.

24. Un paralelogramo tiene lados cuyas longitudes son 32 y 75 cm y uno de sus ángulos mide 73°. Calcular la longitud de sus diagonales.